

CAPÍTULO 2

INCREMENTOS

2.1 CONCEPTO

Supóngase que se tiene una función cualquiera, por ejemplo $y = x^2$, a la cual se le asigna arbitrariamente cualquier valor inicial como $x = 3$, de donde corresponde que $y = 9$. Se quiere saber qué relación existe entre el cambio de la variable independiente x y la variable dependiente ye , es decir, cuando el valor de x cambia, ¿cómo varía por su parte ye ?

La primera pregunta que surge es: ¿Lo que cambia x es lo mismo que lo que cambia ye ? Transformando la pregunta a valores concretos: ¿Cuando x cambia en 1 la variable ye también cambia en 1? Para averiguarlo basta darle valores y se ve que cuando $x = 4$, se obtiene que $y = 16$.

xequis cambió 1

x	3	4
y	9	16

ye cambió 7

Es decir, que mientras x cambió en 1 (pasó de 3 a 4), por su parte la ye varió en 7 (al pasar de 9 a 16), con lo que queda contestada la primera pregunta: Lo que cambia x no es lo que varía ye .

La siguiente pregunta que surge es: ¿Cada vez que la variable x cambia en 1, la variable ye cambia 7? Nuevamente, dando valores numéricos concretos que se concentran en una tabla se tiene lo siguiente:

x	3	4	5
y	9	16	25

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{equis cambió 1}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ye cambió 9}}$

De donde se ve que mientras la x cambió en 1 dos veces (al pasar de 3 a 4 primero y luego de 4 a 5), por su parte la ye cambió 7 y 9 (al pasar de 9 a 16 primero y luego de 16 a 25). Queda contestada la segunda pregunta. Entonces, si cada vez que x cambia en 1 la ye no cambia también 1, como tampoco cada vez que cambia x en 1 la ye no cambia 7, ¿qué relación existe entre el cambio de la variable independiente con la dependiente? La única opción que queda es encontrar una especie de fórmula que muestre esa relación de cambios.

Al cambio que sufre la variable independiente x se le llama *incremento de x* , escrito Δx , mientras que el respectivo cambio que sufre la variable dependiente ye se le llama *incremento de ye* , escrito Δy .

Continuando con la función ejemplo con la que se ha venido trabajando, $y = x^2$, se dice que la variable dependiente ye vale x^2 , es decir, el valor dado inicialmente a x elevado al cuadrado. Así, si $x = 3$, entonces le corresponde $y = 9$. Cuando la x se incrementa en 1, su nuevo valor es $x = 4$. Ese nuevo valor de x es el valor que tenía inicialmente más el incremento que sufrió, esto es, ahora $x = 3 + 1$. El nuevo valor para la ye es 4^2 , o sea $y = 16$, que es el valor inicial que tenía más el incremento de ye .

Lo anterior, en forma generalizada es:

Al inicio: $y = x^2$ (1)

Al final: $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$ (2)

Significa que el nuevo valor de la variable dependiente ye , después de haberse modificado el valor inicial de x es el valor que tenía al inicio más lo que se modificó la misma ye a partir del nuevo valor de x . Véase el ejemplo numérico que sigue.

Visto con números:

$$9 = 3^2$$

$$9 + 7 = (3 + 1)^2$$

Al inicio: O sea que para $x = 3$, $y = 9$.

Al final: Es decir que para $x = 4$, la ye vale 16, que es el valor inicial de ye más lo que se incrementa. Recordar que en la página anterior se vio que mientras la variable x pasa de 3 a 4 (se incrementa en 1), por su parte la variable dependiente ye pasa de 9 a 16 (se incrementa en 7).

despejando ye de (2):

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - y \quad (3)$$

Sustituyendo el valor de ye de (1) en (3):

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 \quad (4)$$

Es la relación buscada. Hay que recordar que lo que se estaba buscando era la relación entre el cambio de x con el cambio de ye .

Retomando el ejemplo numérico inicial, en donde hay que tener presente que $\Delta y = 7$ cuando x pasa de valer 3 a 4 y que $\Delta y = 9$ cuando x pasa de valer 4 a 5:

x	3	4	5
y	9	16	25

cuando x se incrementó en 1 al pasar de 3 a 4, por su parte la variable dependiente y se incrementó en 7, lo cual se puede obtener aplicando la relación (4):

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$$

$$\Delta y = (3 + 1)^2 - 3^2$$

$$\Delta y = 4^2 - 3^2$$

$$\Delta y = 7$$

que es justamente el incremento de y cuando la x pasa de valer 3 a 4. De la misma forma:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$$

$$\Delta y = (4 + 1)^2 - 4^2$$

$$\Delta y = 5^2 - 4^2$$

$$\Delta y = 9$$

el cual es exactamente el incremento de y cuando la x pasa de valer 4 a 5.

Haciendo una generalización del procedimiento para obtener la relación que existe entre los incrementos Δx y Δy para cualquier función $y = f(x)$, se tiene que:

$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Ejemplo 1: Hallar el incremento Δx de la función $y = 3x^2 + x$.

Solución:

$$y = 3x^2 + x$$

$$\Delta y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)$$

$$\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - y \quad (\text{despejando } \Delta y)$$

$$\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - y \quad (\text{sustituyendo } y)$$

$$\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - 3x^2 - x$$

$$\Delta y = 3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + x + \Delta x - 3x^2 - x$$

$$\Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + x + \Delta x - 3x^2 - x$$

$$\Delta y = 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x$$

Ejemplo 2: Calcular el incremento Δx de la función $y = 5x^2 - 2x + 7$.

Solución:

$$y = 5x^2 - 2x + 7$$

$$y + \Delta y = 5(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + 7$$

$$\Delta y = 5(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + 7 - y$$

$$\Delta y = 5(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + 7 - (5x^2 - 2x + 7)$$

$$\Delta y = 5(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 2x - 2x\Delta x + 7 - 5x^2 + 2x - 7$$

$$\Delta y = 5x^2 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 2x - 2\Delta x + 7 - 5x^2 + 2x - 7$$

$$\Delta y = 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 2\Delta x$$

Ejemplo 3: Calcular el incremento Δx de la función $y = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 1$.

Solución:

$$y = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 1$$

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 4(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - 1$$

$$\Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 4(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - 1 - y$$

$$\Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 4(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - 1 - (2x^3 + 4x^2 - 3x - 1)$$

$$\Delta y = 2(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) + 4(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 3x - 3\Delta x - 1 -$$

$$- 2x^3 - 4x^2 + 3x + 1$$

$$\Delta y = 2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 4x^2 + 8x\Delta x + 4\Delta x^2 - 3x - 3\Delta x - 1 -$$

$$- 2x^3 - 4x^2 + 3x + 1$$

$$\Delta y = 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 8x\Delta x + 4\Delta x^2 - 3\Delta x$$

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

Nota: Obsérvese cómo debe repetirse el signo de operación, tanto al final del renglón agotado como del nuevo renglón, cuando toda la expresión, por ser tan larga, no cabe en el mismo renglón.

Ejemplo 4: Calcular el incremento Δx de la función $y = \frac{1}{x}$.

Solución:

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - y \quad (\text{despejando } \Delta y)$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} \quad (\text{sustituyendo } y)$$

$$\Delta y = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} \quad (\text{sacando común denominador})$$

$$\Delta y = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

$$\Delta y = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

o bien

$$\Delta y = \frac{-\Delta x}{x^2 + x\Delta x}$$

EJERCICIO 2.1

Obtener el incremento Δx de las siguientes funciones:

1) $y = 5x + 3$

3) $y = 6 - 9x$

5) $y = x^2 + 11x - 4$

7) $y = 5x - 2x^2 - 2$

9) $y = 2x^3 + 11x$

11) $y = x^2 - x^3$

13) $y = \frac{1}{x^2}$

15) $y = \frac{1}{x^2 + x}$

2) $y = x^2 - 7x + 9$

4) $y = 3x - 7x^2$

6) $y = 8x^2 + 9x + 7$

8) $y = 5x^3$

10) $y = 7x^3 + 3x^2 + 7x - 2$

12) $y = 5x^3 + x^2 - 7$

14) $y = \frac{1}{2x - 1}$